



Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Facoltà di Scienze della Comunicazione e dell'Economia
Corso di Laurea Specialistica in Economia e Gestione delle Reti e dell'Innovazione

Appunti sulla mappa logistica

Fabio Ruini – matricola nr: 7496
e-mail: fabio.ruini@unimore.it
web: <http://www.fabioruini.eu>

Versione preliminare: 29 giugno 2006

La crescita logistica come modello di sviluppo di una popolazione

Introduzione: modellizzare la crescita di una popolazione

In questo paragrafo vogliamo accennare alla descrizione della dinamica di una sola popolazione in interazione con l'ambiente esterno.

Innanzitutto occorre definire con un minimo di precisione cosa intendiamo con il termine "popolazione", ossia un agglomerato di entità di qualunque genere (batteri, esseri umani, ecc...) in grado di riprodursi. Il modello di crescita di una popolazione, invece, descrive come il numero x di membri di questa evolve, cioè cresce o diminuisce nel corso del tempo.

Come sempre, la formulazione di un modello (capace in questo caso di riprodurre l'evoluzione di una popolazione nel tempo) richiede assunzioni semplificative di vario genere, come quelle che stanno alla base del modello di Malthus, che prevede la crescita della popolazione secondo una legge geometrica (o, espressa in forma continua, secondo un'esponenziale), a fronte della crescita della ricchezza secondo una legge aritmetica.

La crescita in presenza di risorse limitate: l'equazione di Verhulst

Poco prima della metà dell'Ottocento, Verhulst propose una correzione al modello di crescita malthusiano, in maniera tale da poter tener conto della limitatezza delle risorse ambientali, introducendo una costante: la *capacità di carico*. Essa rappresenta il massimo valore che il numero di individui di una popolazione può raggiungere, compatibilmente con le risorse ambientali disponibili.

Il modello di crescita esponenziale di una popolazione proposto da Malthus è riassumibile nella formula:

$$[1] \quad n(t) = n(0)e^{rt}$$

dove $n(t)$ è la variabile che indica il valore della popolazione in funzione del tempo, $n(0)$ è il valore iniziale della popolazione, r è il tasso costante di crescita della popolazione.

Calcolando la derivata di questa equazione, si ottiene agevolmente:

$$[2] \quad \dot{n}(t) = rn(t)$$

la quale è trasformabile nella sua forma discreta:

$$[3] \quad n(t+1) = n(t) + rn(t)$$

In quest'ultimo caso, $n(t)$ indica la popolazione all'inizio dell' i -esimo intervallo di ampiezza $\Delta t = 1$ (si assume che la popolazione rimanga costante per tutto questo intervallo). Si tenga in considerazione il fatto che un'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico in tempo continuo, come la [2], viene chiamata *flusso*. La versione in tempo discreto, come la [3] (equazione alle differenze finite), prende invece il nome di *mappa*.

Introduciamo a questo punto la capacità di carico teorizzata da Verhulst: una costante che indichiamo con la lettera k . Per com'è definita la capacità di carico, la crescita della popolazione non soltanto deve azzerarsi una volta raggiunto il valore k , ma questa costante deve manifestare la

sua influenza anche prima che n raggiunga il massimo permesso, frenando la velocità di crescita, in maniera sempre più marcata quanto più n è grande.

La capacità di carico si può introdurre sommando al secondo membro delle equazioni [2] e [3] un termine negativo opportunamente scelto, che sia funzione del valore della popolazione n . In questo modo si introduce nel sistema un vero e proprio meccanismo di feedback: l'evoluzione della popolazione è ora governata non solo da un termine di crescita libera malthusiano, ma anche da un meccanismo di regolazione che si pone in competizione con la crescita libera. L'influenza di questo termine dipende da circostanze ambientali, ossia dalla relazione tra la popolazione in un dato momento e la capacità di carico del sistema (ossia, il rapporto: $n(t)/k$). La presenza di questo secondo termine provoca la distruzione della linearità espressa dalla legge di crescita.

Verhulst riscrisse la forma discreta dell'equazione di Malthus nel modo seguente:

$$[4] \quad n(t+1) = n(t) + rn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{k}\right)$$

che è esprimibile in una forma più sintetica e schematica:

$$[5] \quad x(t+1) = \lambda x(t)(1 - x(t))$$

dove $\lambda = 1 + r$.

La mappa espressa nell'equazione [5] è detta *mappa logistica*. Se eliminiamo il raccoglimento di $\lambda x(t)$, l'equazione [5] può essere espressa in una forma ancora diversa: $x(t+1) = \lambda x(t) - \lambda x^2(t)$, nella quale si nota che al secondo membro sono presenti due addendi che agiscono in modo opposto per dare origine al valore della popolazione al tempo successivo al primo. $\lambda x(t)$ funziona in un certo senso da "motore" che provoca la crescita della popolazione secondo una legge lineare; $-\lambda x^2(t)$ funge invece da "freno", provocando una decrescita della popolazione.

Se interpretiamo la $x(t)$ come una popolazione essa non può ovviamente assumere valori negativi. Allo stesso modo, un valore di $x(t)$ maggiore di 1 farebbe sì che, al tempo successivo, il valore $x(t+1)$ diventerebbe negativo. L'utilità della trasformazione dall'equazione [4] alla [5] sta proprio nel "normalizzare" la variabile $x(t)$ tra 0, il valore minimo, ed 1, il valore massimo. Questo è particolarmente comodo per lo studio del modello, che può essere così condotto da un punto di vista più generale, senza considerare il particolare valore della capacità di carico, ma esprimendo invece la popolazione in termini percentuali rispetto al massimo permesso.

La funzione logistica

Riprendiamo in considerazione il modello di Malthus in tempo continuo (equazione [2]). Introducendo il termine k secondo lo stesso ragionamento seguito per la forma discreta, otteniamo la seguente equazione differenziale del primo ordine (corrispondente continua dell'equazione [4]):

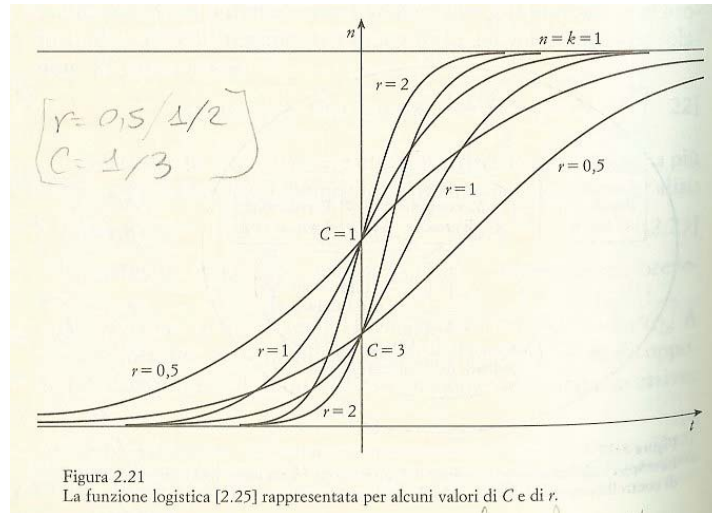
$$[6] \quad \dot{n}(t) = rn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{k}\right)$$

Se sono date le condizioni iniziali, l'equazione [6] soddisfa le condizioni previste dal teorema di esistenza ed unicità e fornisce quindi una sola soluzione analitica. Integrando si ottiene infatti:

$$[7] \quad n(t) = \frac{k}{1 + Ce^{-rt}}$$

dove la costante di integrazione C dipende dal valore iniziale della popolazione $n(0)$ ed è data da $C = \frac{k - n(0)}{n(0)}$. L'equazione [7] è nota come la *funzione (o curva) logistica*.

Nella figura che segue, la curva logistica è tracciata per alcuni valori del parametro r (0.5, 1 e 2), combinati con due valori della costante C (1 e 3):



La curva logistica, così come appare in maniera lampante dalla figura qui sopra, manifesta un tipico “andamento ad S”: lenta crescita iniziale, seguita da un’accelerazione della crescita (più o meno marcata a seconda del valore del parametro r) e poi da un successivo rallentamento in prossimità del valore massimo permesso $n(t)=k$, che costituisce così un limite asintotico della funzione.

E’ interessante notare come Verhulst, quando introdusse la capacità di carico e la funzione logistica che ne deriva in forma continua, concepisse l’idea sulla base di un’analogia con la fisica, prendendo spunto dalla resistenza che l’attrito oppone al moto. In presenza di attriti, infatti, l’accelerazione di un corpo sottoposto ad una forza è uguale al valore costante che essa avrebbe in assenza di attriti, diminuito di un termine proporzionale alla velocità del corpo. Allo stesso modo, questa fu la sua intuizione, il tasso di crescita della popolazione, \dot{n}/n , è dato da un termine costante a , diminuito di un termine, proporzionale al valore della popolazione attraverso un fattore b , ovvero:

$$\frac{\dot{n}}{n} = a - bn$$

che è proprio la legge logistica in forma continua (equazione [6]), di cui la mappa logistica (equazione [5]) è la versione in tempo discreto.

Nei primi anni del Novecento, Pearl fece largo uso della legge di crescita logistica in una serie di indagini demografiche e mostrò che essa è in grado di descrivere efficacemente l’evoluzione di numerosi gruppi ridotti di popolazioni umane, opportunamente definiti. Egli arrivò persino ad utilizzare la funzione logistica per calcolare i valori futuri del totale dell’intera popolazione mondiale, finendo tuttavia per sottostimare in maniera notevole le cifre che si osservarono realmente.

Anche Le Bras, considerando individui che vivono in un territorio limitato e facendo assunzioni piuttosto drastiche, stabilì che era possibile costruire elementare modelli demografici dai quali emergesse, in maniera chiara ed inequivocabile, una legge di crescita di tipo logistico.

Il generale la curva logistica costituisce uno schema di crescita relativamente semplice, che trova applicazione in vari contesti: in ogni situazione in cui si vuole modellizzare una crescita non lineare di una variabile in presenza di un fattore che agisce, analogamente alla capacità di carico, ponendosi come valore massimo per la variabile e limitandone la velocità di crescita.

Studi più recenti hanno dimostrato come l'ipotesi di un fattore limitante k costante sia quantomeno inverosimile, poiché è difficile escludere a priori effetti dovuti a interazione tra il valore x assunto dalla popolazione ed il fattore limitante k . Una popolazione umana, infatti, si adatta all'ambiente e, in questo modo, sposta i limiti che si impongono alla crescita ricorrendo a nuovi mezzi di produzione, migliorando la produttività e, in generale, per mezzo dell'innovazione tecnologica. Per ragioni di questo tipo, ad esempio, il massimo numero di individui che possono convivere in un'unità di superficie è molto più basso un'area rurale (ammettendo che al suo interno si praticino esclusivamente attività agricole primarie), che non in un'area urbana, nella quale la disponibilità di risorse alimentari per ogni singolo individuo è ben maggiore rispetto a quella che, nella stessa superficie urbana, sarebbe fornita dal settore primario.

Il modello di crescita logistico, infine, in alcune sue varianti è stato ripetutamente applicato alla descrizione dei processi di diffusione, in particolare nelle scienze sociali, come ad esempio per la diffusione di epidemie in una popolazione o la diffusione di un prodotto commerciale in un mercato.