Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
Facoltà di Scienze della Comunicazione e dell'Economia
Corso di Laurea Specialistica in Economia e Gestione delle Reti e dell'Innovazione

Appunti sulla mappa logistica

Fabio Ruini – matricola nr: 7496
e-mail: fabio.ruini@unimore.it
web: http://www.fabioruini.eu

Rielaborazione da: *Cristoforo Sergio Bertuglia e Franco Vaio: "Non linearità, caos, complessità. Le dinamiche dei sistemi naturali e sociali" (ed. Bollati Boringhieri, 2003).*

La crescita logistica come modello di sviluppo di una popolazione

Introduzione: modellizzare la crescita di una popolazione

In questo paragrafo vogliamo accennare alla descrizione della dinamica di una sola popolazione in interazione con l'ambiente esterno.

Innanzitutto occorre definire con un minimo di precisione cosa intendiamo con il termine "popolazione", ossia un agglomerato di entità di qualunque genere (batteri, esseri umani, ecc…) in grado di riprodursi. Il modello di crescita di una popolazione, invece, descrive come il numero x di membri di questa evolve, cioè cresce o diminuisce nel corso del tempo.

Come sempre, la formulazione di un modello (capace in questo caso di riprodurre l'evoluzione di una popolazione nel tempo) richiede assunzioni semplificative di vario genere, come quelle che stanno alla base del modello di Malthus, che prevede la crescita della popolazione secondo una legge geometrica (o, espressa in forma continua, secondo un'esponenziale), a fronte della crescita della ricchezza secondo una legge aritmetica.

La crescita in presenza di risorse limitate: l'equazione di Verhulst

Poco prima della metà dell'Ottocento, Verhulst propose una correzione al modello di crescita malthusiano, in maniera tale da poter tener conto della limitatezza delle risorse ambientali, introducendo una costante: la *capacità di carico*. Essa rappresenta il massimo valore che il numero di individui di una popolazione può raggiungere, compatibilmente con le risorse ambientali disponibili.

Il modello di crescita esponenziale di una popolazione proposto da Malthus è riassumibile nella formula:

[1] $$n(t) = n(0)e^{rt}$$

dove *n(t)* è la variabile che indica il valore della popolazione in funzione del tempo, *n(0)* è il valore iniziale della popolazione, r è il tasso costante di crescita della popolazione.

Calcolando la derivata di questa equazione, si ottiene agevolmente:

[2] $$\dot{n}(t) = rn(t)$$

la quale è trasformabile nella sua forma discreta:

[3] $$n(t+1) = n(t) + rn(t)$$

In quest'ultimo caso, *n(t)* indica la popolazione all'inizio dell'i-esimo intervallo di ampiezza $\Delta t = 1$ (si assume che la popolazione rimanga costante per tutto questo intervallo). Si tenga in considerazione il fatto che un'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico in tempo continuo, come la [2], viene chiamata *flusso*. La versione in tempo discreto, come la [3] (equazione alle differenze finite), prende invece il nome di *mappa*.

Introduciamo a questo punto la capacità di carico teorizzata da Verhulst: una costante che indichiamo con la lettera k. Per com'è definita la capacità di carico, la crescita della popolazione non soltanto deve azzerarsi una volta raggiunto il valore k, ma questa costante deve manifestare la sua influenza anche prima che *n* raggiunga il massimo permesso, frenando la velocità di crescita, in maniera sempre più marcata quanto più *n* è grande.

La capacità di carico si può introdurre sommando al secondo membro delle equazioni [2] e [3] un termine negativo opportunamente scelto, che sia funzione del valore della popolazione *n*. In questo modo si introduce nel sistema un vero e proprio meccanismo di feedback: l'evoluzione della popolazione è ora governata non solo da un termine di crescita libera malthusiano, ma anche da un meccanismo di regolazione che si pone in competizione con la crescita libera. L'influenza di questo termine dipende da circostanze ambientali, ossia dalla relazione tra la popolazione in un dato momento e la capacità di carico del sistema (ossia, il rapporto: $n(t)/k$). La presenza di questo secondo termine provoca la distruzione della linearità espressa dalla legge di crescita.

Verhulst riscrisse la forma discreta dell'equazione di Malthus nel modo seguente:

[4] $$n(t+1) = n(t) + rn(t)(1 - \frac{n(t)}{k})$$

che è esprimibile in una forma più sintetica e schematica:

[5] $$x(t+1) = \lambda x(t)(1 - x(t))$$

dove $\lambda = 1 + r$.

La mappa espressa nell'equazione [5] è detta *mappa logistica*. Se eliminiamo il raccoglimento di $\lambda x(t)$, l'equazione [5] può essere espressa in una forma ancora diversa: $x(t+1) = \lambda x(t) - \lambda x^2(t)$, nella quale si nota che al secondo membro sono presenti due addendi che agiscono in modo opposto per dare origine al valore della popolazione al tempo successivo al primo. $\lambda x(t)$ funziona in un certo senso da "motore" che provoca la crescita della popolazione secondo una legge lineare; $-\lambda x^2(t)$ funge invece da "freno", provocando una decrescita della popolazione.

Se interpretiamo la *x(t)* come una popolazione essa non può ovviamente assumere valori negativi. Allo stesso modo, un valore di *x(t)* maggiore di 1 farebbe sì che, al tempo successivo, il valore *x(t+1)* diventerebbe negativo. L'utilità della trasformazione dall'equazione [4] alla [5] sta proprio nel "normalizzare" la variabile *x(t)* tra 0, il valore minimo, ed 1, il valore massimo. Questo è particolarmente comodo per lo studio del modello, che può essere così condotto da un punto di vista più generale, senza considerare il particolare valore della capacità di carico, ma esprimendo invece la popolazione in termini percentuali rispetto al massimo permesso.

La funzione logistica

Riprendiamo in considerazione il modello di Malthus in tempo continuo (equazione [2]). Introducendo il termine *k* secondo lo stesso ragionamento seguito per la forma discreta, otteniamo la seguente equazione differenziale del primo ordine (corrispondente continua dell'equazione [4]):

[6] $$\dot{n}(t) = rn(t)(1 - \frac{n(t)}{k})$$

Se sono date le condizioni iniziali, l'equazione [6] soddisfa le condizioni previste dal teorema di esistenza ed unicità e fornisce quindi una sola soluzione analitica. Integrano si ottiene infatti:

$$[7] \qquad n(t) = \frac{k}{1 + Ce^{-rt}}$$

dove la costante di integrazione C dipende dal valore iniziale della popolazione $n(0)$ ed è data da $C = \frac{k - n(0)}{n(0)}$. L'equazione [7] è nota come la *funzione (o curva) logistica*.

Nella figura che segue, la curva logistica è tracciata per alcuni valori del parametro r (0.5, 1 e 2), combinati con due valori della costante C (1 e 3):

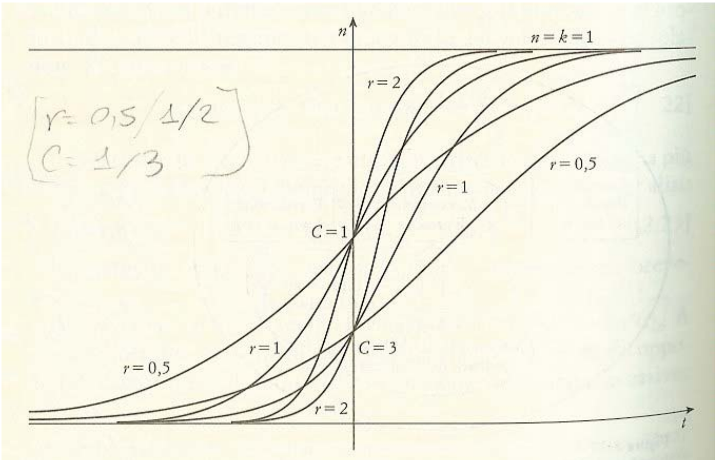


Figura 2.21
La funzione logistica [2.25] rappresentata per alcuni valori di C e di r.

La curva logistica, così come appare in maniera lampante dalla figura qui sopra, manifesta un tipico "andamento ad S": lenta crescita iniziale, seguita da un'accelerazione della crescita (più o meno marcata a seconda del valore del parametro r) e poi da un successivo rallentamento in prossimità del valore massimo permesso $n(t)=k$, che costituisce così un limite asintotico della funzione.

E' interessante notare come Verhulst, quando introdusse la capacità di carico e la funzione logistica che ne deriva in forma continua, concepisse l'idea sulla base di un'analogia con la fisica, prendendo spunto dalla resistenza che l'attrito oppone al moto. In presenza di attriti, infatti, l'accelerazione di un corpo sottoposto ad una forza è uguale al valore costante che essa avrebbe in assenza di attriti, diminuito di un termine proporzionale alla velocità del corpo. Allo stesso modo, questa fu la sua intuizione, il tasso di crescita della popolazione, $\dot{n}/n$, è dato da un termine costante a, diminuito di un termine, proporzionale al valore della popolazione attraverso un fattore b, ovvero: $\frac{\dot{n}}{n} = a - bn$, che è proprio la legge logistica in forma continua (equazione [6]), di cui la mappa logistica (equazione [5]) è la versione in tempo discreto.

Nei primi anni del Novecento, Pearl fece largo uso della legge di crescita logistica in una serie di indagini demografiche e mostrò che essa è in grado di descrivere efficacemente l'evoluzione di numerosi gruppi ridotti di popolazioni umane, opportunamente definiti. Egli arrivò persino ad utilizzare la funzione logistica per calcolare i valori futuri del totale dell'intera popolazione mondiale, finendo tuttavia per sottostimare in maniera notevole le cifre che si osservarono realmente.

Anche Le Bras, considerando individui che vivono in un territorio limitato e facendo assunzioni piuttosto drastiche, stabilì che era possibile costruire elementare modelli demografici dai quali emergesse, in maniera chiara ed inequivocabile, una legge di crescita di tipo logistico.

Il generale la curva logistica costituisce uno schema di crescita relativamente semplice, che trova applicazione in vari contesti: in ogni situazione in cui si vuole modellizzare una crescita non lineare di una variabile in presenza di un fattore che agisce, analogamente alla capacità di carico, ponendosi come valore massimo per la variabile e limitandone la velocità di crescita.

Studi più recenti hanno dimostrato come l'ipotesi di un fattore limitante k costante sia quantomeno inverosimile, poiché è difficile escludere a priori effetti dovuti a interazione tra il valore x assunto dalla popolazione ed il fattore limitante k. Una popolazione umana, infatti, si adatta all'ambiente e, in questo modo, sposta i limiti che si impongono alla crescita ricorrendo a nuovi mezzi di produzione, migliorando la produttività e, in generale, per mezzo dell'innovazione tecnologica. Per ragioni di questo tipo, ad esempio, il massimo numero di individui che possono convivere in un'unità di superficie è molto più basso un un'area rurale (ammettendo che al suo interno si pratichino esclusivamente attività agricole primarie), che non in un'area urbana, nella quale la disponibilità di risorse alimentari per ogni singolo individuo è ben maggiore rispetto a quella che, nella stessa superficie urbana, sarebbe fornita dal settore primario.

Il modello di crescita logistico, infine, in alcune sue varianti è stato ripetutamente applicato alla descrizione dei processi di diffusione, in particolare nelle scienze sociali, come ad esempio per la diffusione di epidemie in una popolazione o la diffusione di un prodotto commerciale in un mercato.

Un modello discreto non lineare: la mappa logistica

Introduzione

Proseguiamo ora lo studio del modello di crescita presentato nel paragrafo precedente, la legge logistica, illustrando la dinamica della versione in tempo discreto (equazione [5]). Quello che interessa, in particolare, è mostrare come un semplice modello di crescita non lineare di questo tipo, che determina la crescita logistica di una popolazione, possa in taluni casi generare il caos.

Riconsideriamo la mappa logistica nella forma dell'equazione [5] e, per semplicità, la riscriviamo, senza modificazioni nella sostanza, sostituendo la dipendenza dal tempo con un indice k che "conta" le successive iterazioni:

[8] $$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k)$$

In questo modo, il valore della variabile x all'iterazione (tempo) $k+1$ dipende dal valore che la stessa variabile x ha all'iterazione (tempo) precedente k. I valori di x_k, così come descritto in precedenza, sono compresi tra 0 ed 1. Siamo ancora in presenza di una mappa quadratica, in cui la successione dei valori x_k, per un dato valore di λ, fornisce l'evoluzione della popolazione a intervalli temporali discreti. Lo spazio delle fasi del sistema dinamico rappresentato dall'equazione [8] è costituito da una sola variabile, la x_k, e l'insieme dei successivi valori di x_k è l'orbita della popolazione.

Il fatto che la popolazione x sia compresa tra 0 ed 1 impone una limitazione anche ai valori del parametro di crescita λ il quale, da una parte non deve mai essere negativo (affinché la popolazione non diventi mai negativa) e, dall'altra parte, non deve superare il valore 4 (affinché la popolazione non superi 1, che è il valore massimo ammesso).

Nel dettaglio, a seconda del valore assunto da λ, si prefigurano i seguenti casi:

- $\lambda < 0$: la popolazione diventa subito negativa. Questo ovviamente non ha senso, perciò valori negativi di λ non sono accettabili;
- $\lambda = 0$: valore minimo accettabile. La popolazione diventa nulla alla prima iterazione e, successivamente, rimane sempre tale;
- $0 < \lambda < 4$: è il caso che ci apprestiamo a discutere. La popolazione evolve mantenendosi sempre compresa tra 0 e 1;
- $\lambda = 4$: altro caso limite. La sua particolarità sta nel fatto che, se nel corso dell'evoluzione la popolazione raggiunge il valore x_k=0.5, allora nei passi successivi x_{k+1} e x_{k+2}, i suoi valori saranno rispettivamente 1 e 0, con conseguente estinzione;
- $\lambda > 4$: la popolazione manifesta una velocità di crescita troppo alta. Quando x_k raggiunge valori compresi in un certo intorno di 0.5 (la cui ampiezza dipende da λ), all'iterazione successiva x_{k+1} supera 1, il valore massimo consentito.

Apriamo a questo punto una piccola parentesi per richiamare il concetto di punto fisso di una funzione, che utilizzeremo subito dopo, applicandolo all'equazione [8].

Metodo delle iterazioni e punti fissi di una funzione

Uno dei metodi più semplici per la ricerca delle radici approssimate di un'equazione è quello noto come *metodo delle iterazioni*. Esso consiste nello scrivere l'equazione di cui si cerca una radice esplicitando un'incognita x a primo membro, cioè sotto la forma:

[9] $x = f(x)$

A questo punto si assegna un valore x_1 alla variabile x e si calcola $f(x_1)$. Successivamente si pone $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ e così via, secondo la mappa iterativa:

[10] $x_{n+1} = f(x_n)$

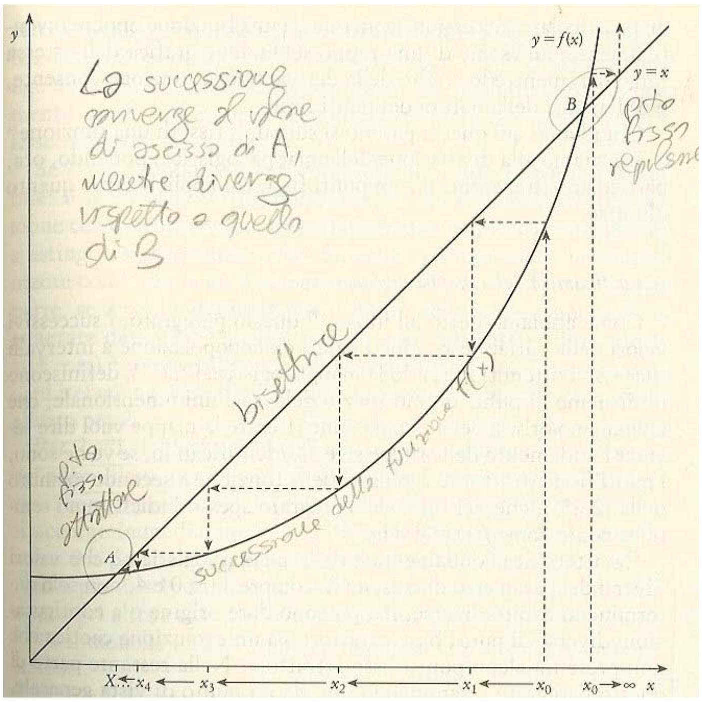
Si tratta della formalizzazione di un procedimento che può essere realizzato da un calcolatore tascabile per individuare la radice approssimata dell'equazione $x = \cos(x)$, ponendo x_1=1 (in radianti) e premendo per un certo numero di volte il tasto per il calcolo del coseno.

Al susseguirsi delle iterazioni, i valori di x_n tendono a stabilizzarsi, definendo un numero reale con precisione crescente. Il limite cui tende la successione dei numeri generati iterando l'equazione [10], se esiste ed è finito (come nell'esempio del coseno), è un'approssimazione della radice X ricercata:

[11] $X = \lim_{x \to \infty} \cos x_n$

Il valore X definito dal limite qui sopra, radice dell'equazione [10], è detto *punto fisso attrattore di f(x)*. E' dimostrabile che la successione $x_{n+1} = f(x_n)$ converge verso un numero X, punto fisso attrattore, solo se, in un intorno di X, la derivata della funzione è $|f'(X)| < 1$.

Il metodo delle iterazioni che abbiamo appena esposto può vantare un'efficace interpretazione di carattere geometrico. Tracciando in un grafico, separatamente, i due termini dell'equazione [9], ossia $y = x$ e $y = f(x)$, otteniamo una figura come quella che segue:



I punti fissi della funzione possono essere trovati graficamente tra i punti di intersezione della funzione $y = f(x)$ con la retta bisettrice del primo quadrante $y = x$.

Possiamo distinguere tra punti fissi *attrattori* (come il punto A della figura) e punti fissi *repulsori* (ad esempio il punto B). Se i primi sono quei punti di ascissa *X*, in comune fra la $f(x)$ e la retta $y = x$, in un intorno dei quali si ha $|f'(X)| < 1$, per i punti fissi repulsori vale invece la condizione opposta, ossia che $|f'(X)| > 1$. Dai punti fissi repulsori, la successione $x_{n+1} = f(x_n)$, iniziata ponendo un valore x_1 prossimo a *X*, si allontana sempre di più al crescere di *n*. Non è pertanto possibile individuare l'ascissa *X* di un punto fisso repulsore cercando il limite della successione delle x_{n+1}, ma occorrono metodi matematici più complicati. Si consideri che i punti fissi repulsori, in generale, agiscono come confine tra i bacini di attrazione di punti attrattori.

La ricerca dei punti fissi di una funzione, attrattori o repulsori, in sostanza, è soltanto uno degli aspetti dell'eterno problema dell'algebra: la ricerca delle radici di un'equazione qualsiasi. Cn questa tecnica, la ricerca delle radici si riconduce allo studio di una particolare successione generata da una funzione oppure, eventualmente, all'esame di una rappresentazione grafica della stessa funzione, mentre lo studio della derivata della funzione consente, in seguito, l'analisi della natura dei punti fissi.

La dinamica della mappa logistica

Come abbiamo accennato in precedenza, i successivi valori della variabile x_k, cioè i valori della popolazione ad intervalli successivi, ottenuti iterando la mappa logistica, definiscono un insieme di punti in uno spazio delle fasi unidimensionale, che chiamiamo *orbita della popolazione*. Iterare la mappa vuol dire seguire l'andamento delle successive x_k, identificando, se ve ne sono, i punti fissi attrattori o repulsori della funzione a secondo membro, che nel seguito del paragrafo spesso indicheremo semplicemente come $f(x) = \lambda x(1 - x)$.

Caratteristica fondamentale della mappa logistica è che valori diversi del parametro di crescita λ, compresi tra 0 e 4, non solo determinano orbite diverse, ma possono dare origine o a configurazioni diverse di punti fissi attrattori o a un'evoluzione caotica che non presenta alcun punto fisso attrattore. Vediamo, da un punto di vista generale, gli aspetti qualitativi delle diverse situazioni che si verificano al crescere del parametro λ da 0 a 4.

Si rileva subito che esiste un punto fisso indipendente dal valore di λ: si tratta di $x = 0$, rispetto al quale indichiamo l'ascissa con X_1. Abbiamo visto che un punto fisso risulta essere attrattore o repulsore a seconda del valore che assume la derivata di $f(x)$:

[12] $$f'(x) = \lambda - 2\lambda x = \lambda(1 - 2x)$$

calcolata in quel punto. La derivata dell'equazione [12] risulta essere uguale al parametro di crescita λ: per questo motivo, possiamo concludere che il punto $X_1 = 0$ è un punto fisso attrattore se $\lambda < 1$, repulsore se $\lambda > 1$.

Più nel dettaglio, se $\lambda < 1$, $X_1 = 0$ configura uno stato di equilibrio stabile: il modello è quello di una popolazione che diventa sempre meno numerosa e tende asintoticamente ad estinguersi, a causa del parametro di crescita troppo basso. E' d'altronde evidente come il limite della successione espressa dall'equazione [8] per $\lambda < 1$ non possa che essere zero.

Per $\lambda = 1$, la derivata [12] assume valore 1 e non aiuta quindi a comprendere la natura del punto fisso in questione. Iterando l'equazione [8] con $\lambda = 1$, tuttavia, ci si accorge immediatamente che la successione delle x_k converge verso 0 a partire da qualsiasi valore iniziale compreso tra 0 e 1. Anche per $\lambda = 1$, quindi, $X_1 = 0$ costituisce un punto fisso attrattore.

Non essendovi altre radici dell'equazione [4], possiamo concludere che, per $\lambda \leq 1$, il modello descritto dall'equazione [8] conduce sempre all'estinzione della popolazione.

Per $\lambda > 1$, la derivata risulta sempre maggiore di 1. Questo ci assicura che $X_1 = 0$ è un punto fisso repulsore, ossia un punto di equilibrio instabile. $\lambda > 1$ rappresenta in sostanza il caso di una popolazione che, a partire da un valore iniziale piccolo, prossimo a 0, tende a crescere. Questa crescita, però, si mantiene solo fino a quando, per x_k sufficientemente grande, non diventano importanti altri elementi che la frenano o la invertono. Se, per x_1 prossimo a 0 e $\lambda > 1$, i primi termini della successione delle x_k sono infatti crescenti, la situazione è diversa quando l'iterazione inizia da un valore di x_1 che non è prossimo a 0, oppure quando, al crescere della popolazione, cresce anche il valore del termine di secondo grado dell'equazione scritta nella forma: $x_k(1 - x_k) = x_k - x_k^2$. In questi ultimi due casi, il successivo andamento della popolazione varia in funzione dal particolare valore assunto dal parametro λ: da esso, infatti, dipende *se* e *dove* si realizza l'equilibrio tra il meccanismo di crescita, il termine di primo grado positivo x_k e quello di decrescita, il termine di secondo grado negativo $-x_k^2$.

Le situazioni che si realizzano per $\lambda > 1$ sono quindi tra loro differenti e vanno studiate nel dettaglio. Illustriamo pertanto i diversi casi che si presentano al passare del valore di λ da 1 a 4.

- *Caso 1:* $1 < \lambda \leq 3$

  Abbiamo visto che X_1 è ora un punto fisso repulsore. Riscrivendo l'equazione [8] sotto la forma $x = f(x)$, otteniamo una semplice equazione di secondo grado $x = \lambda x(1 - x)$, la quale presenta una seconda radice X_2 ricavabile con i metodi dell'algebra elementare ed il cui valore dipende da λ. Per $1 < \lambda \leq 3$, la derivata [2.28] calcolata in X_2 risulta essere maggiore di 1, per cui possiamo concludere che X_2 costituisce un punto fisso attrattore, indipendentemente dal suo valore particolare.
  La situazione descritta dalla mappa logistica dell'equazione [8] descrive l'evoluzione di una popolazione la quale, al procedere delle iterazioni, tende asintoticamente verso un valore X_2, il quale non dipende dal punto iniziale da cui origina l'evoluzione, ma soltanto dal valore del parametro di crescita λ. Il sistema, con il procedere delle iterazioni, perde in un certo senso la memoria dello stato iniziale, facendo tendere sempre e comunque la popolazione verso il valore X_2.
  Al crescere di λ da 1 a 3 si hanno due effetti: da un lato il punto fisso X_2 diventa sempre più alto, crescendo con continuità fino al valore $X_2 = 2/3$ (raggiunto per $\lambda = 3$); dall'altro, diminuisce la rapidità con la quale la popolazione tende all'attrattore X_2, poiché il valore della derivata decresce diventando sempre più prossimo al valore critico 1. Per $\lambda = 3$ si ha infatti che, siccome $X_2 = 2/3$, allora la derivata $|f'(2/3)|$ risulta essere uguale ad 1. In questa situazione, X_2 perde la sua caratteristica di attrarre il valore della popolazione x_k. Il valore $\lambda = 3$ è dunque un valore critico che chiameremo λ_1: per $\lambda = \lambda_1$, la successione delle x_k cessa di convergere ad un valore asintotico e si ha dunque la transizione verso una dinamica diversa rispetto a quella espressa nel Caso 1.

- *Caso 2:* $3 < \lambda < 3.56994$

Quando λ entra all'interno di questo intervallo, il punto fisso X_2 diventa repulsore e nascono due nuovi punti attrattori da parti opposte rispetto ad X_2 (uno maggiore e l'altro minore). La variabile x_k tende ora in maniera asinotica ad oscillare tra i due nuovi valori, che si alternano periodicamente, iterazione dopo iterazione, uno per le iterazioni pari ed un altro per quelle dispari. I due nuovi punti fissi attrattori costituiscono, nel loro insieme, un attrattore unico, per così dire "sdoppiato" in due valori.
Questo sdoppiamento dell'attrattore, tuttavia, si mantiene solo fintanto che λ, crescendo, non raggiunge un secondo valore critico λ_2, dato da: $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \cong 3.44949$. Per $\lambda > \lambda_2$, ciascuno dei due punti fissi attrattori diventa un repulsore e dà origine a due nuovi punti fissi attrattori (così com'era capitato ad X_2 una volta oltrepassato il valore critico $\lambda_1 = 3$). La popolazione tende ora ad oscillare tra quattro stati asintoticamente stabili, determinati dal parametro di crescita λ e non dal valore iniziale della popolazione. Si hanno quindi quattro punti fissi repulsori, i quali delimitano i bacini di attrazione degli altri quattro punti fissi attrattori. Con il raddoppio del numero degli stati finali tra cui la popolazione oscilla, naturalmente, raddoppia anche il periodo dell'oscillazione.
Al crescere ulteriore di λ si osserva che lo sdoppiamento degli stati finali si ripete nuovamente, secondo le stesse modalità descritte in precedenza, in corrispondenza di un nuovo valore critico λ_3 e poi ancora con un altro valore critico λ_4 e via di seguito. Ciò che emerge è in sostanza che lo sdoppiamento degli stati si ripete in corrispondenza di una successione infinita di valori critici λ_n del parametro di crescita λ. La popolazione evolve con il tempo, tendendo a portarsi in una condizione nella quale oscilla tra 2^n valori che si susseguono ciclicamente, con un periodo costituito da 2^n valori di x_k. I successivi raddoppi del periodo di osservazione insorgono per valori λ_n via via crescenti, ma sempre più ravvicinati tra loro: la successione delle λ_n ha come limite un numero irrazionale λ_∞, un valore approssimato del quale è $\lambda_\infty \cong 3.56994$.
Per $3 < \lambda < \lambda_\infty$ la configurazione dell'attrattore, pur articolandosi in stati sempre più numerosi, dipende solo dal valore di λ e non dal valore iniziale della popolazione: anche in questo Caso 2 è il valore del parametro di crescita che pilota totalmente l'evoluzione del sistema. E' evidente come la perdita di memoria dello stato iniziale sia la situazione diametralmente opposta rispetto alla sensibilità allo stato iniziale, condizione necessaria affinché l'evoluzione di un sistema possa essere definita una dinamica caotica. E' però ragionevole considerare il fatto che, al crescere del numero n degli stati tra i quali avviene l'oscillazione, il periodo diviene sempre più lungo e difficile da riconoscere sulla base dell'osservazione diretta. La crescente difficoltà ad identificare una periodicità nella successione delle x_k, al crescere del parametro λ, comporta che al crescere di λ l'evoluzione della popolazione secondo il modello della mappa logistica diventi sempre meno prevedibile, in quanto la periodicità dei valori appare sempre più "allargata" in una successione di valori in cui è sempre meno riconoscibile qualcosa di simile ad un limite o ad una ricorrenza. Se il periodo non è evidente, non solo non possiamo stabilire se è presente un attrattore, ma non possiamo neppure essere sicuri del fatto che i dati provengano da un modello deterministico e non siano invece casuali.
Ad ogni modo, in questo Caso 2 la ricorrenza esiste, per quanto essa possa essere poco riconoscibile. La situazione è particolare: non vi è il caos, ma esiste un attrattore *ordinario* costituito da un numero di stati (punti fissi attrattori isolati) sempre più grande al crescere di λ, laddove per $\lambda < 3$ vi era un solo stato asintotico. Il sistema popolazione, in questa condizione, crea nuovi stati limite, al crescere di λ, ma sempre restando nella condizione in cui si perde la memoria dello stato iniziale dell'evoluzione.

- *Caso 3:* $\lambda \geq \lambda_\infty \cong 3.56994$

Abbiamo visto che la situazione di successivi raddoppi del numero di stati tra cui la popolazione oscilla stabilmente, e dei conseguenti raddoppi successivi del periodo di oscillazione al crescere di λ permane fino al raggiungimento del valore critico $\lambda_\infty \cong 3.56994$. Quando λ raggiunge e poi supera λ_∞, qualunque valore iniziale x_1 dà luogo a traiettorie aperiodiche, indipendentemente da quanto sia lunga la successione delle x_k. Vi sono ancora, tuttavia, degli intervalli di valori di λ per i quali la periodicità torna a manifestarsi.
I punti fissi esistenti nei Casi 1 e 2, che costituivano l'attrattore e che, tutti insieme, definivano un insieme di punti isolati, diventano ora, per una dato valore di $\lambda \geq \lambda_\infty$, talmente fitti da costituire un insieme infinito di punti isolati distribuiti in un intervallo la cui ampiezza cresce al crescere di λ (pur restando, come sempre, compresa all'interno dell'intervallo [0,1]. In sostanza, i successivi sdoppiamenti diventano infiniti ed originano un insieme infinito di punti fissi attrattori e repulsori. L'orbita del sistema dovrebbe passare per infiniti punti/stati prima di ripassare per un punto/stato già toccato: in pratica, non vi ripassa più. Per $\lambda \geq \lambda_\infty$ non si osserva alcuna periodicità nella successione delle x_k. Non vi è alcuna stabilità, neppure asintotica: il tasso di crescita è talmente grande che l'evoluzione della popolazione non riconosce più alcun insieme stabile di stati ricorrenti in cui vadano a confluire le orbite che originano da valori iniziali diversi. In questa condizione, il valore della popolazione, ad una data iterazione, dipende dal valore iniziale da cui si è cominciato a far evolvere la mappa: valori iniziali diversi ora comportano valori diversi alla *n*-esima iterazione, laddove, nei Casi 1 e 2, le differenze tra orbite iniziate da valori diversi tendevano a scomparire al procedere delle iterazioni. In questo senso, diciamo che la dinamica del sistema conserva ora la memoria dello stato iniziale. Non possiamo a questo punto conoscere uno stato futuro senza calcolare *tutti* gli stati precedenti, uno per uno. La legge deterministica è sempre la stessa, ma modificando, anche di pochissimo, un particolare stato, l'iterazione successiva potrebbe dare dei valori molto differenti rispetto a quelli che sarebbero seguiti allo stato presente imperturbato. In questo Caso 3 la dinamica del sistema popolazione è sensibile alle condizioni iniziali: in questo senso possiamo parlare di imprevedibilità del futuro. La dinamica risultante è caotica ed il valore del parametro di crescita λ_∞ può essere visto pertanto come il confine oltre il quale nasce l'imprevedibilità: il confine del caos.
E' interessante notare come, al crescere di λ oltre il valore 3, incontriamo soltanto dinamiche oscillatorie tra stati in numeri pari (le successive potenze di 2). Per $\lambda \geq \lambda_\infty$ tali stati, tutti originati da una successione infinita di raddoppi del periodo di oscillazione, costituiscono un insieme infinito. A partire da un particolare valore di soglia del parametro di crescita $\lambda^* \cong 3.6786$, compaiono però anche periodi dispari: vale a dire, succede che i successivi valori x_k della popolazione prendano ad oscillare tra un numero *dispari* di stati, uscendo dall'insieme delle periodicità definito dalle potenze di 2. I periodi dispari che compaiono sono inizialmente molto lunghi, poi, al crescere di λ, diminuiscono fino a quando, per $\lambda = 1 + \sqrt{8} \cong 3.8284$ compare l'oscillazione della popolazione tra soli *tre* stati (periodo di lunghezza 3). Secondo un celebre teorema di Tien-Yen Li e James Yorke, si possono trovare, inframezzati ai valori di λ per i quali le traiettorie sono aperiodiche, anche valori di λ che danno origine a successioni di x_k che oscillano (asintoticamente) su un *qualsiasi* numero finito di stati. In altre parole, per $\lambda > \lambda^*$, si possono avere evoluzioni periodiche con periodi di lunghezza qualsiasi.

La mappa logistica: qualche risultato delle simulazioni numeriche

L'albero di Feigenbaum

Si osservi la figura seguente:

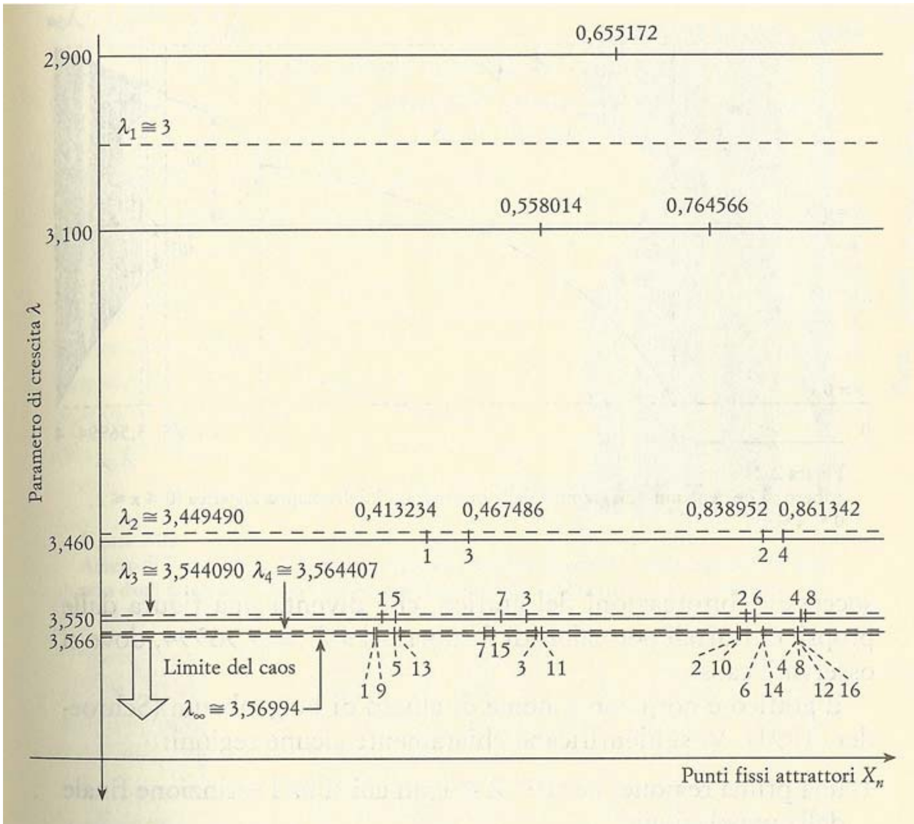


Figura 2.23
I punti fissi attrattori della mappa logistica.

Per $\lambda = 3,550$ il sistema oscilla, nell'ordine, fra gli otto stati seguenti:

1	0,354800	3	0,540475	5	0,370325	7	0,506030
2	0,812656	4	0,881684	6	0,827805	8	0,887370

Per $\lambda = 3,566$ il sistema oscilla, nell'ordine, fra i sedici stati seguenti:

1	0,344955	5	0,378004	9	0,347779	13	0,370818
2	0,805777	6	0,838427	10	0,808872	14	0,831990
3	0,558081	7	0,483076	11	0,551297	15	0,498464
4	0,879470	8	0,890478	12	0,882116	16	0,891491

In ordinata è riportato il valore del parametro di crescita λ; in ascissa vi sono invece i punti fissi attrattori X_n tra i quali la popolazione oscilla. Le linee orizzontali tratteggiate delineano i primi quattro valori di λ_n che danno origine a sdoppiamenti dei punti fissi, nonché λ_∞, oltrepassato il quale si manifesta il caos. Sono stati scelti a titolo di esempio alcuni valori di λ di poco superiori a λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 e, in corrispondenza di questi, si è fatta evolvere la mappa logistica per 500 iterazioni, arrivando ad identificare i valori degli stati attrattori nelle prime sei cifre. Per $\lambda = 3.550$ e $\lambda = 3.566$ invece, i punti fissi sono stati indicati soltanto con il numero che indica l'ordine con cui essi si succedono periodicamente, riportando nella legenda i valori numerici delle corrispondenti ascisse.

La figura che emerge può essere vista come una sorta di "riassunto" schematico della dinamica della mappa logistica per particolari combinazioni dei parametri che entrano in gioco durante la sua evoluzione. Ancora più interessante osservare il grafico successivo, dove sono rappresentati i valori degli stati di equilibrio che l'evoluzione della mappa logistica prevede per la popolazione in funzione del parametro di crescita λ.

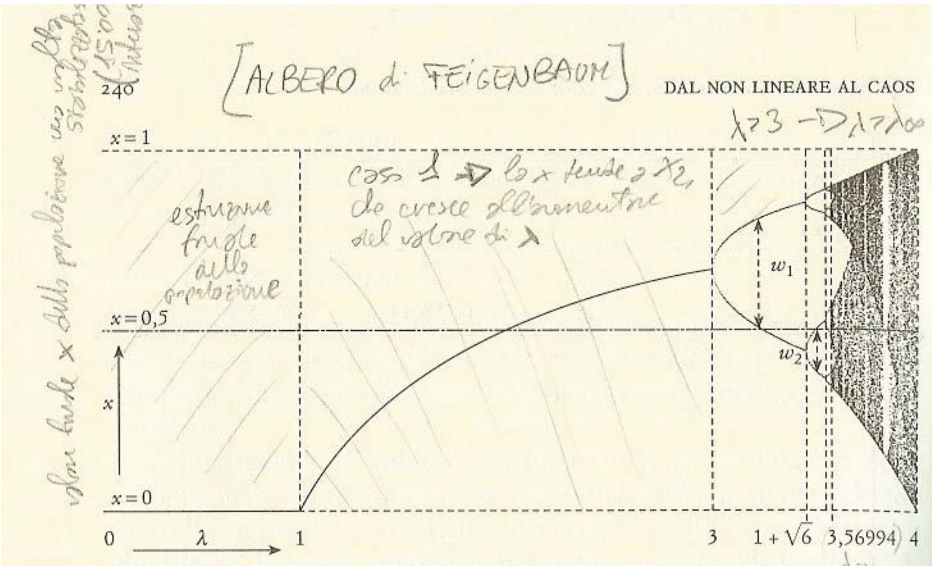


Figura 2.24
Albero di Feigenbaum (diagramma delle biforcazioni) della mappa logistica ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 4$).

In questo caso l'ordinata di ciascun punto del grafico indica il valore finale *x* della popolazione, una volta che questa si sia stabilizzata, dopo 15000 iterazioni, in funzione del parametro λ riportato in ascissa. I successivi sdoppiamenti (cioè i successivi raddoppiamenti del periodo discussi nelle pagine precedenti) generano le successive biforcazioni del grafico, che diventa una figura delle proprietà frattali per valori di λ superiori a $\lambda_\infty \cong 3.56994$, dove si osserva il caos.

Il grafico è noto con il nome di *Albero di Feigenbuam* ed è possibile identificare chiaramente al suo interno alcune particolari regioni:

- una prima regione, per $0 < \lambda \leq 1$, in cui si ha l'estinzione finale della popolazione;
- una seconda regione, per $1 < \lambda \leq 3$, che corrisponde al Caso 1 precedentemente descritto: la popolazione evolve verso uno stato finale stabile, dato dal punto fisso che avevamo chiamato X_2. Il valore di X_2 cresce al crescere di λ in questa seconda ragione, descrivendo quello che appare come un arco di iperbole;
- una terza regione, per $\lambda > 3$, in cui si osservano, al crescere di λ, successivi e sempre più ravvicinati raddoppi del numero dei punti fissi attrattori, ciascuno dei quali percorre, sempre al crescere di λ, un nuovo arco di iperbole, prima di sdoppiarsi a sua volta.

Una prima osservazione che balza subito evidente dall'osservazione dell'Albero di Feigenbaum è il significato che assume il punto di accumulazione λ_∞ nell'insieme dei valori di λ_n: in corrispondenza di λ_∞ cominciano ad apparire zone "grigie", dove gli stati di equilibrio non sono più identificabili singolarmente, poiché i punti si sono addensati finendo per "coprire" intervalli di *x*.

Oltre a λ_∞ esiste un altro valore limite, indicato con δ, che descrive la velocità con cui, al crescere di *n*, le λ_n si "addensano" nel loro tendere verso λ_∞, cioè quanto ciascuna λ_n si è avvicinata alla successiva λ_{n+1}, rispetto a quanto λ_{n-1} era vicina a λ_n. Più precisamente, esiste il seguente limite finito, di cui è stato calcolato il valore approssimato: $\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} + \lambda_n} \cong 4.6692160910299$.

Una seconda osservazione concerne il fatto che gli sdoppiamenti degli stati, riconoscibili nelle successive biforcazioni del diagramma, oltre a succedersi sempre più fitti al crescere di λ_n, danno origine a biforcazioni che diventano di ampiezza sempre minore. Indicando con w_n l'ampiezza della biforcazione misurata rispetto all'intersezione con la retta di equazione $x = 1/2$, esiste il limite del rapporto tra le ampiezze di due biforcazioni successive: $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{w_{n+1}} \cong 2.5029078750$.

Le costanti δ e α sono note come i *numeri di Feigenbaum*.

Nell'albero delle biforcazioni di Feigenbaum è riconoscibile una vera e propria invarianza di scala (proprietà detta autosomiglianza), caratteristica fondamentale dei frattali. Essa è riscontrabile, ad esempio, nel modo in cui le biforcazioni dei rami si ripetono sempre più numerose e a scala sempre più piccola, al crescere di λ. L'autosomiglianza che si evidenzia con ripetuti cambiamenti di scala consente di definire l'albero di Feigenbaum un vero e proprio fratale.

La zona caotica dell'albero non appare pertanto come un'area uniforme, ma si presenta screziata da infinite striature verticali: delle bande di vero e proprio ordine, in cui i punti, almeno in apparenza, si dispongono su curve regolari. Tale fenomeno è detto *intermittenza* ed è un tipico aspetto di una struttura frattale. Vi sono infinite successive ondate di intermittenza: ripetuti ingrandimenti di scala mettono in evidenza questa sorta di ordine che si genera, per così dire, frapposto in mezzo al disordine, fenomeno tipico del caos.

Accanto agli sdoppiamenti degli stati che si ravvisano nelle biforcazioni dell'albero, si osserva anche la presenza di situazioni in cui la popolazione oscilla su un numero dispari di stati. Come detto in precedenza, i cicli di triplicazione sono particolarmente importanti, poiché il loro sorgere garantisce la presenza di periodicità di qualsiasi ordine e, quindi, l'esistenza del caos.

La presenza di zone caotiche nella dinamica fornita dalla mappa logistica, secondo il valore del parametro di crescita λ, può essere evidenziata anche facendo ricorso agli *esponenti di Lyapunov*. Applicando la formula per il calcolo dell'esponente di Lyapunov alla mappa logistica, si ottiene che esso dipende dal valore del parametro di crescita λ, dal valore della variabile di stato x_n da cui iniziano le iterazioni e dal numero N di iterazioni:

[13] $$\Lambda = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \ln |\lambda(1 - 2x_n)|$$

Ricordiamo che quando l'esponente di Lyapunov è positivo si ha una dinamica caotica, mentre al contrario, quando è negativo, la dinamica è di non-caos. Il raffronto tra l'andamento dell'esponente di Lyapunov e dell'albero di Fegenbaum è riportato graficamente nella figura presentata nella pagina successiva.

L'instabilità della mappa logistica (e dunque la sensibilità di questa alle condizioni iniziali) raggiunge il massimo per $\lambda = 4$, valore in corrispondenza del quale anche l'esponente di Lyapunov per la mappa logistica è massimo.

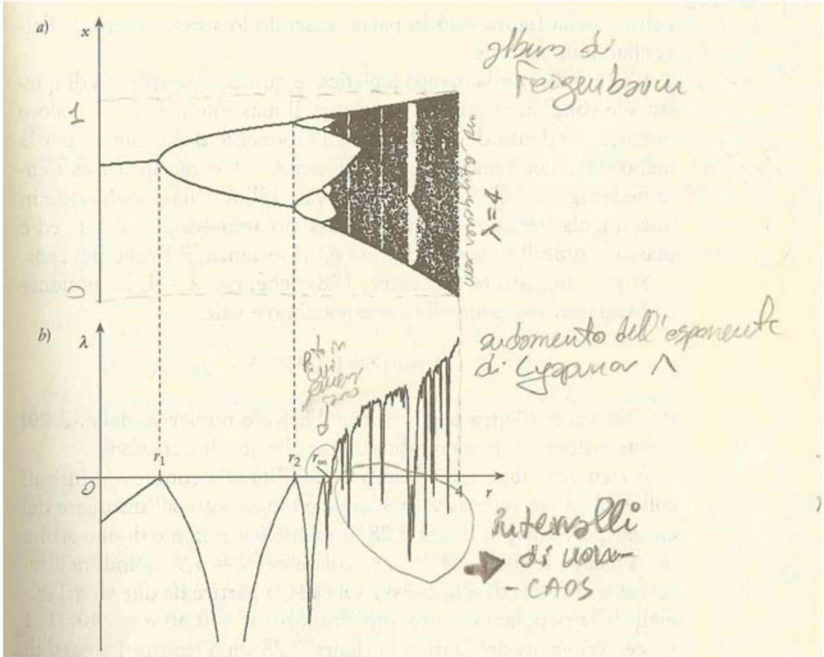


Figura 2.27
Andamento dell'esponente di Lyapunov Λ (in basso nella figura) in funzione del parametro λ della mappa logistica: confrontato con l'albero di Feigenbaum (in alto nella figura).
Fonte: Çambel, 1993, p. 210.

Un punto di fondamentale importanza evidenziato da Feigenbaum è che la dinamica della mappa logistica che abbiamo illustrato non è peculiare della sola mappa logistica dell'equazione [8], ma è generale per una vasta classe di mappe unidimensionali: tutte le funzioni che, nell'intervallo considerato, sono continue e derivabili, presentano un solo massimo di tipo quadratico, e sono unimodali, cioè strettamente crescenti prima del massimo e strettamente decrescenti dopo di esso. L'importanza di questo fatto è che dinamiche del tutto simili a quella descritta per la mappa logistica possono sussistere per numerosi altri modelli differenti in apparenza, ma non nella sostanza matematica.